Romuald Szymkiewicz

METODY NUMERYCZNE W INŻYNIERII WODNEJ

Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej

Romuald Szymkiewicz

METODY NUMERYCZNE W INŻYNIERII WODNEJ

Gdańsk 2012

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Janusz T. Cieśliński

RECENZENT
Wanda Kowalska

PROJEKT OKŁADKI
Katarzyna Olszonowicz

Wydanie II – 2007

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej
Gdańsk 2012

Publikacja dostępna tylko w wersji elektronicznej

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiejkolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-457-3

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie II. Ark. wyd. 12,2, ark. druku 17,0, 1009/747

Spis treści

Przedmowa 5

1. Rozwiązywanie układów algebraicznych równań liniowych 7
   1.1. Wprowadzenie 7
   1.2. Dokładne metody rozwiązywania układów równań liniowych 9
      1.2.1. Układy z macierzami trójkątnymi 9
      1.2.2. Metoda eliminacji Gaussa 11
      1.2.3. Metoda rozkładu macierzy układu na macierze trójkątne 13
      1.2.4. Metoda odwracania macierzy 16
      1.2.5. Metoda gradientów sprzężonych 16
   1.3. Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych 17
   1.4. Uwagi o układach równań liniowych 20

2. Rozwiązywanie przybliżone równań nieliniowych 23
   2.1. Wprowadzenie 23
   2.2. Metoda połowienia (bisekcji) 24
   2.3. Metoda interpolacji liniowej (siecznych) 25
   2.4. Metoda iteracji prostej 30
   2.5. Metoda Newtona (stycznych) 38
   2.6. Metody hybrydowe 41
      2.6.1. Metoda Riddersa 42
      2.6.2. Metoda Wegsteina 43
      2.6.3. Metoda Steffensena 44
   2.7. Rozwiązywanie układów równań nieliniowych 46
      2.7.1. Metoda iteracji prostej (Picarda) 47
      2.7.2. Metoda Newtona 47

3. Interpolacja i aproksymacja funkcji 54
   3.1. Uwagi wstępne 54
   3.2. Wielomiany interpolacyjne 55
   3.3. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a 55
   3.4. Interpolacja funkcjami sklejanymi 58
   3.5. Aproksymacja funkcji za pomocą wielomianów 63
   3.6. Porównanie interpolacji i aproksymacji 67

4. Metody poszukiwania ekstremum funkcji jednej zmiennej 68
   4.1. Przedstawienie problemu 68
   4.2. Wyznaczenie ekstremum funkcji przez rozwiązanie równania nieliniowego 70
   4.3. Metoda podziału przedziału na trzy równe części 73
   4.4. Metoda złotego podziału 78
   4.5. Metoda wykorzystująca ciąg liczb Fibonacciego 82

5. Całkowanie numeryczne 85
   5.1. Całki oznaczone w inżynierii wodnej 85
   5.2. Numeryczne obliczanie wartości pojedynczych całek oznaczonych 88
   5.3. Numeryczne obliczanie wartości całek podwójnych 96

6. Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych 100
6.1. Wprowadzenie 100
6.2. Numeryczne rozwiązywanie zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych 101
6.2.1. Metody jawne jednokrokowe 103
6.2.2. Metody jawne wielokrokowe 108
6.2.3. Metody niejawne jednokrokowe 111
6.2.4. Metody niejawne wielokrokowe 118
6.2.5. Rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych 120
6.2.6. Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych rzędu wyższego niż jeden 122
6.3. Numeryczne rozwiązywanie zagadnień brzegowych układów równań różniczkowych zwyczajnych 126

7. Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych 132
7.1. Przykłady równań w inżynierii wodnej 132
7.2. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych i poprawne formułowanie problemu ich rozwiązania 139
7.3. Metoda różnic skończonych 149
7.4. Metoda elementów skończonych 154
7.5. Elementy teorii numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych .. 162

8. Algorytmy rozwiązania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych metodą różnic skończonych 180
8.1. Rozwiązanie jednowymiarowego równania filtracji nieustalonej 180
8.2. Rozwiązanie układu równań de Saint-Venanta 187
8.3. Rozwiązanie jednowymiarowego równania adwekcji-dyfuzji 199
8.4. Rozwiązanie dwuwymiarowego równania filtracji nieustalonej 205
8.5. Rozwiązanie dwuwymiarowego równania filtracji ustalonej pod ciśnieniem 215
8.6. Rozwiązanie układu równań uderzenia hydraulicznego metodą charakterystyk z zastosowaniem metody różnic skończonych 227

9. Algorytmy rozwiązania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych metodą elementów skończonych 237
9.1. Rozwiązanie jednowymiarowego równania adwekcji-dyfuzji 237
9.2. Rozwiązanie dwuwymiarowego równania filtracji ustalonej pod ciśnieniem 246
9.3. Rozwiązanie dwuwymiarowego równania filtracji nieustalonej ze swobodnym zwierciadłem 255

Bibliografia 264

Załącznik 266

Przedmowa

Inżynieria wodna należy do tych dyscyplin, w których metody numeryczne są szczególnie szeroko stosowane jako ważne narzędzie analizy i rozwiązywania zagadnień inżynierskich. Praktycznie wszystkie istotne przypadki przepływu wód powierzchniowych i wód podziemnych, a także przepływy w rurociągach i ich sieciach oraz przepływy przez budowle hydrotechniczne (przelewy, zasuwy, upusty denne itd.) mogą być skutecznie rozwiązywane metodami numerycznymi. Są to zagadnienia, które spotykamy w takich dyscyplinach szczegółowych, jak hydromechanika, hydraulika, hydrologia czy hydrogeologia. Procesy przepływu wody należą do bardziej złożonych zjawisk fizycznych, nie zawsze w pełni rozpoznanych. Nawet wprowadzając daleko posunięte uproszczenia, zwykle otrzymujemy skomplikowane modele matematyczne. Zależnie od założeń co do zmienności parametrów charakteryzujących ruch wody w przestrzeni i czasie, mają one postać równań algebraicznych lub ich układów, równań różniczkowych zwyczajnych, bądź równań różniczkowych cząstkowych.

Nawet najprostsze równania algebraiczne opisujące ruch ustalony jednostajny w kanale otwartym lub w rurociągu, przepływ przez przelew itd., są równaniami nieliniowymi, które można rozwiązać tylko w sposób przybliżony. Identyczna sytuacja występuje w przypadku modeli w postaci równań różniczkowych lub ich układów. Zmienne w czasie i przestrzeni parametry modelowanych obiektów, ich nieregularny kształt, zmienne w czasie oddziaływanie zewnętrzne i nieliniowość równań uniemożliwiają znalezienie rozwiązań analitycznych nawet dla najprostszych warunków. Możliwe jest jednak znalezienie rozwiązań przybliżonych za pomocą metod numerycznych. Zarówno wymienione wyżej powody, jak i powszechna dostępność komputerów oraz gwałtownie rosnące ich możliwości obliczeniowe, a także potrzeby praktyczne spowodowały w ostatnich 35 latach duże zainteresowanie inżynierów-hydrotechników metodami numerycznego rozwiązywania zagadnień inżynierii wodnej.

Mając na uwadze rodzaje zagadnień występujących w inżynierii wodnej i typy równań opisujących je, w książce omówiono metody rozwiązywania algebraicznych równań nieliniowych i ich układów, równań różniczkowych zwyczajnych i ich układów oraz wszystkich typów równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, tj. hiperbolicznych, parabolicznych oraz eliptycznych. Ponadto omówiono takie zagadnienia, jak rozwiązywanie układów algebraicznych równań liniowych, powszechnie występujących w trakcie rozwiązywania wymienionych wcześniej równań, a także interpolację i aproksymację, które często stosowane są przy rozwiązywaniu wielu problemów w inżynierii wodnej.

Niniejsza książka przeznaczona jest jako pomoc dydaktyczna przede wszystkim dla studentów kierunku budownictwo (specjalność budownictwo wodne) oraz inżynieria środowiska, mających za sobą wykład z podstaw informatyki. Poszczególne zagadnienia omówiono w sposób przystępny, umożliwiający samodzielne rozwiązywanie typowych zadań inżynierii wodnej. Z tego powodu podstawy teoretyczne metod numerycznych ograniczono do niezbędnego minimum, podając jednocześnie źródła bibliograficzne, w których można znaleźć szczegółowe i wyczerpujące informacje na dany temat. Jednak

od czytelnika wymagana jest znajomość podstawowych działów matematyki w zakresie kursu matematyki dla wymienionych wcześniej kierunków studiów. W celu ułatwienia korzystania z książki w dodatku zamieszczonym na jej końcu przypomniano syntetyczne informacje o błędach w obliczeniach, reprezentacji maszynowej liczb itd. Zakłada się również, że czytelnik posiada znajomość fizycznych podstaw dotyczących przepływu wody w przewodach pod ciśnieniem, w kanałach otwartych i w ośrodkach porowatych, a także transportu domieszek rozpuszczonych w wodzie. Dla pełniejszej ilustracji omówionych metod i przedstawionych algorytmów, większość zagadnień zilustrowano przykładami rozwiązań.

Życzliwe zainteresowanie P.T. Czytelników dwoma wcześniejszymi wydaniami książki w wersji papierowej stało się zachętą do jej ponownego wydania. W stosunku do poprzednich, niniejsza wersja „Metod…" została w wielu miejscach poprawiona oraz uzupełniona o dwa dodatkowe rozdziały i kilka przykładów. Jednak w przeciwieństwie do wspomnianych wydań, tym razem książka jest udostępniana Czytelnikom w wersji elektronicznej w ramach Pomorskiej Biblioteki Cyfrowej.

Bardzo dziękuję Pani Katarzynie Olszonowicz za pomoc w przygotowaniu tekstu i rysunków.

Autor